Μάθημα 3ο: 26/03/2020

Σημείωση: Θα ανεβαίνει στο e-course:

① «Πίνακας» Εξ Αποστάσεως: στον οποίον θα γράφονται επιγραμματικά αυτά που έχουμε κάνει σε προηγούμενα μαθήματα και τι θα κάνουμε την ώρα του μαθήματος

② Υλικό από τις σημειώσεις που υπάρχουν στην ιστοσελίδα του

→ Μέχρι τώρα, κάναμε μία εβδομάδα μάθημα. Τι κάναμε???

Ορίσαμε το σώμα των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ με σκοπό να λύσουμε την εξίσωση $\boxed{x^2=-1}$, η οποία δεν έχει λύση στο $\mathbb{R}$. Επομένως, αυτό που κάναμε είναι να επεκτείνουμε το $\mathbb{R}$ σε ένα σώμα στο οποίο να διατηράμε τις ιδιότητες του $\mathbb{R}$. Τότε το σώμα που θα πάρω είναι το $\mathbb{R}^2$ με πράξεις πρόσθεσης και πολλ/σμού.

Έτσι, το $(\mathbb{C},+)$ "1-1" και επί μεταθετική ομάδα το αντιστοιχούμε με το $(\mathbb{R}^2,+)$.

Άρα, κάθε διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$ το αντιστοιχούμε σε έναν μιγαδικό αριθμό. Δηλαδή:

① $\boxed{\mathbb{C} \ni z = x+y\cdot i = x\cdot 1 + y\cdot i = x\cdot(1,0)+y\cdot(0,1) = (x,y)\in\mathbb{R}^2}$

Άρα το $z\in\mathbb{C}$ αντιστοιχεί στο $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

② $z=x+y\cdot i$ $\boxed{\text{ονομάζεται}}$ Αλγεβρική Μορφή του μιγαδικού

③ $y\cdot i$ $\boxed{\text{ονομάζεται}}$ βαθμωτός πολλ/μος γιατί είναι πολλ/μος ενός πραγματικού αριθμού (του y) με έναν φανταστικό αριθμό (το i)

③ $z_1 z_2$ $\boxed{\text{ορίζει}}$ <u>πολλ/σμό</u> γιατί είναι γινόμενο
<u>δύο μιγαδικών</u> αριθμών (z_1, z_2).

④ $i \cdot i = -1$ ή $i^2 = -1$

→ Είδαμε: πράξεις και ιδιότητες του $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

Ⓐ <u>Πρόσθεση στο $\mathbb{C}$</u>

Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ τότε:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1 \cdot i) + (x_2 + y_2 \cdot i)$$

$$z_1 + z_2 \overset{①}{=} (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) i}$$

Ⓑ <u>Πολλ/σμός στο $\mathbb{C}$</u>

Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, τότε:

$$z_1 z_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) \quad \text{(κάνοντας επιμεριστική)}$$

$$= x_1(x_2 + y_2 i) + y_1 i (x_2 + y_2 i)$$

$$= x_1 x_2 + x_1 y_2 i + y_1 i x_2 + y_1 i y_2 i$$

$$= x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1) \cdot i$$

$$\Rightarrow z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i$$

SOS

Ⓒ <u>Αντίστροφος του $z \neq 0$</u> ή $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{C}^*$

<u>Ορίζεται ως:</u> $z^{-1} = \dfrac{1}{z}$

→ Μάθαμε επίσης
↗ συζυγή αριθμό
→ πραγματικό μέρος + <u>ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ</u>
→ φανταστικό μέρος <u>ΑΥΤΩΝ</u>
→ απόλυτη τιμή

→ Από ασκήσεις είχαμε κάνει μαζί τις:

A5, A.6, A.7

και αφήσαμε ως εργασία τις

A.1, A.2, A.8

Εκτός ύλης (αλλά αν θέλει κάποιος τις λύνει) οι:

A.3, A.4

« Στο σημερινό μάθημα »

(A) Συνάρτηση "n-οστής" δύναμης (όπου "n" φιξαρισμένο)

→ Ορισμός: Για $n \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε τη συνάρτηση "n-δύναμης":

$$z \mapsto z^n = \underbrace{z \cdots z}_{\text{πολ/ζω "n" φορές}}, \quad z \in \mathbb{C}, \ n \in \mathbb{N}$$

Ειδικά:

Για $n=0$: $z \mapsto z^0 = 1$, $z \in \mathbb{C}$

Για $n<0$: $z \mapsto z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

και $n \in \mathbb{N}$. [Προσοχή: Το z δεν μπορεί να είναι 0 γιατί είναι στον παρανομαστή και στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ αφού το $\mathbb{C}$ επεκτείνει το $\mathbb{R}$ και έχει τις ιδιότητες που έχει και το $\mathbb{R}$.

→ Από τις ιδιότητες του πολ/σμού για $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{C}^*$ και $n, m \in \mathbb{Z}$ προκύπτουν τα εξής:

$$z^n z^m = z^{n+m}$$
$$(z^n)^m = z^{n \cdot m}$$

$$(zw)^n = z^n w^n$$

* Αυτές οι τρεις ιδιότητες ισχύουν και όταν $\boxed{z=0}$ ή $\boxed{w=0}$ αν $n, m \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$

Ως ΑΣΚΗΣΗ να αποδείξουμε τις παραπάνω ιδιότητες
Υπόδειξη: ΕΠΑΓΩΓΙΚΑ και για $n, m \neq 0$ και αρνητικούς ακέρ.

(B) Εκθετική Συνάρτηση

Για κάθε φανταστικό αριθμό $iy \in \underbrace{i\mathbb{R}}_{\text{σύνολο φανταστικών αριθμών}}$, ορίζουμε τον μιγαδικό:

(1) $\boxed{E(y) = e^{iy} = \cos y + i\sin y \,, \quad y \in \mathbb{R}}$

(i) → Ο τύπος αυτός ονομάζεται τύπος του Euler

(ii) → $e^{i0} = 1 \,, \quad e^{\pm i\pi/2} = \pm i \,, \quad e^{\pm i\pi} = -1$
[προκύπτουν από τον τύπο (1) και από τις ιδιότητες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων]

(iii) → Ειδικότερα, οι τριγ/κές συναρτήσεις από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$ καθώς και η εκθετική συνάρτηση από το $\mathbb{R}$ θεωρούνται ΓΝΩΣΤΕΣ

(iv) → Ως ΑΣΚΗΣΗ Να επιβεβαιώσουμε όλες τις σχέσεις στο (ii).

(v) → Από την τριγ/κή ταυτότητα, για $a \in \mathbb{R}$:

$$\cos^2 a + \sin^2 = 1 \quad \underline{\text{και}}$$

τον ορισμό της απόλυτης τιμής μιγαδικού αριθμού προκύπτει (2) $\boxed{|e^{iy}| = 1 \,, \, y \in \mathbb{R}}$ [το οποίο γεωμετρικά παριστάνει στο $\mathbb{R}^2$ έναν κύκλο ακτίνας 1 και κέντρου (0,0)]

(v) → $\overline{e^{iy}} = e^{-iy}, y \in \mathbb{R}$

Απόδειξη

Γνωρίζοντας ότι η $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και η $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ περιττή και τον τύπο (1), έχουμε:

$$\overline{e^{iy}} = \cos y - i \sin y \underset{\sin .\ \text{περιττή}}{\overset{\cos\ \text{άρτια}}{=}} \cos(-y) + i \sin(-y)$$

$$= e^{i(-y)} = e^{-yi} = e^{-iy}$$

$$\Rightarrow \overline{e^{iy}} = e^{-iy} \quad \blacksquare$$

(vi) → $e^{i(y+2\kappa\pi)} = e^{iy}, y \in \mathbb{R}, \kappa \in \mathbb{Z}$

[Ως ΑΣΚΗΣΗ: να το αποδείξουμε]

Ειδικότερα:

$$e^{i2\kappa\pi} = 1$$

Άσκηση Α.2

$$|z - i + 3| < 5$$
$$|x + iy - i + 3| < 5$$
$$|(x+3) + i(y-1)| < 5$$
$$(x+3)^2 + (y-1)^2 < 5^2$$

[Περιγραφή με λόγια της άσκησης:
Το $|z - i + 3| < 5$ είναι ο ανοικτός κυκλικός δίσκος στο $\mathbb{C}$ ή ισοδύναμα στο $\mathbb{R}^2$ με κέντρο $-3 + i = (-3, 1)$ και ακτίνα 5].